El Cálculo y las series

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Septiembre de 2021

Índice

1. El Cálculo y las series

Las sumas de progresiones geométricas, con un número finito de sumandos, ya aparecen en la matemática griega; hemos visto que Arquímides las usa en su cuadratura de un segmento de parábola. En la Edad Media tardía, siglo XIV, aparecen esporádicamente algunas series para calcular la distancia recorrida por cuerpos móviles cuando la velocidad cambia de un período temporal a otro. Así Richard Swineshead, apodado *el caculador de Oxford*, publicó hacia 1350 un tratado, *Liber Calculationum*, en el que, con un largo y tedioso razonamiento puramente verbal, logra calcular la suma de la primera serie no geométrica:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\frac{n}{2^n}+\cdots=2 \tag{1}$$

cuya suma representa la velocidad media de un móvil que en un intervalo de tiempo unidad y con velocidad inicial unidad va aumentando su velocidad de unidad en unidad cada vez que transcurre la mitad del tiempo restante.

Nicolás de Oresme en su *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, publicado en 1350, prueba que si se van haciendo sucesivamente las sumas $\{1+1/2+\cdots+1/n\}$, entonces, afirma, “la totalidad llegará a ser infinito”. Su razonamiento es el mismo que ahora se hace para probar la divergencia de la serie armónica, a saber, Oresme razona agrupando términos de forma conveniente:

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\\&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\end{aligned}$$

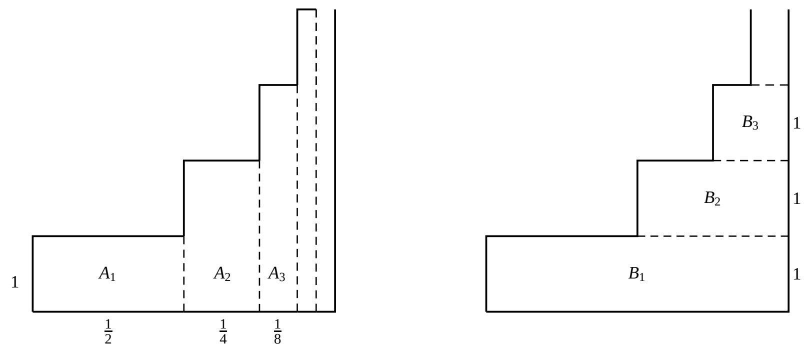
Así mismo, en la citada obra, Oresme probó que si k es un entero mayor que 1 y a es una cierta cantidad:

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^2+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^3+\cdots+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^n+\cdots=a$$

Oresme razona esta igualdad verbalmente como sigue [7]:

> Si una parte proporcional (la k-ésima parte) se quita de alguna cantidad a, y si del resto que queda vuelve a quitarse la misma parte proporcional y así sucesivamente, finalmente tal cantidad será consumida enteramente de forma exacta – no más, no menos – por esta forma de sustracción.

Observa que haciendo $k=a=4/3$ se obtiene la serie geométrica de razón $1/4$ usada por Arquímides.



También proporciona Oresme la siguiente estrategia geométrica para calcular la suma de la serie (27).

Puesto que área$(A_n) = \frac{n}{2^n}$ y área$(B_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ se deduce que

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\frac{n}{2^n}+\cdots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\text{área}(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\text{área}(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2$$

Oresmes no pretendía usar las series para realizar cálculos sino para estudiar las paradojas relacionadas con el hecho de que un número infinito de cantidades finitas pudiera tener una suma finita, cuestiones que están relacionadas con la estructura del continuo y su infinita divisibilidad y con las aporías de Zenón de Elea.

Las progresiones geométricas establecen un puente entre lo discreto y lo continuo. Para Gregory de St. Vincent (1584 - 1667) una serie es un *continuo dividido*; en su *Opus Geometricum* (1647) escribe: "Llamo serie geométrica a una cantidad finita dividida en sucesión ininterrumpida según una razón dada cualquiera" [**?**]. Fue el primero en afirmar explícitamente que una serie infinita puede representar una magnitud. También le debemos el primer análisis de las paradojas de Zenón usando series. Descubrió que la cuadratura de la hipérbola $xy = k$ es la misma en $[a,b]$ que en $[c,d]$ cuando $a/b = c/d$, resultado fundamental para la comprensión de los logaritmos y que llevó al descubrimiento del logaritmo natural por Mercator.

1.1. Los primeros desarrollos en serie

En 1668, Nicholas Mercator (1620 - 1687) publicó un libro titulado *Logarithmotechnia* en el que proporcionaba un método para calcular logaritmos basado en el desarrollo en serie del logaritmo natural

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{2}$$

el cual obtuvo usando los resultados de Gregory de St. Vincent.

A su vez, este resultado de Mercator fue mejorado por James Gregory (1638 - 1675) que obtuvo la expansión:

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\cdots$$

que converge más rápidamente que la anterior. A James Gregory se debe también la serie del arcotangente:

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \tag{3}$$

Sustituyendo $x=1$ resulta

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

Mejores representaciones de π se deducen de esta serie haciendo como A. Sahrp (1651 - 1742) $x=1/\sqrt{3}$, con lo que

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\cdots\right)$$

Con cuya serie calculó π con 72 cifras decimales en 1705. Una mejor aproximación de π que evita el uso de radicales y converge rápidamente, fue obtenida en 1706 por John Machin (1680 - 1752). La idea es expresar $\pi/4=\arctan 1$ en función de dos ángulos de tangentes racionales y cada una de ellas menor que la unidad. La serie de Machin es:

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\cdots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\cdots\right)$$

Con ella calculó π con 100 cifras decimales.

1.2. Newton y las series infinitas

Los principales descubrimientos matemáticos de Newton en el campo del cálculo infinitesimal datan de los llamados *Anni Mirabiles* 1665 y 1666. La Universidad de Cambridge, en la que Newton se había graduado como *bachelor of arts* en 1664, estuvo cerrada por la peste esos dos años. Newton pasó ese tiempo en su casa de Woolsthorpe y, como él mismo reconoció cincuenta años después, ése fue el período más creativo de su vida.

A principios de 1665 descubre el teorema del binomio y el cálculo con las series infinitas. A finales de ese mismo año, el método de fluxiones, es decir, el cálculo de derivadas. En 1666 el método inverso de fluxiones y la relación entre cuadraturas y fluxiones. En esos dos años también inició las teorías de los colores y de la gravitación universal. Newton tenía 24 años, había nacido el día de Navidad de 1642.

Newton había leído la obra de Wallis *Arithmetica Infinitorum*, y siguiendo las ideas de interpolación allí expuestas, descubrió la serie del binomio que hoy lleva su nombre. Dicha serie es una generalización del desarrollo del binomio, que era bien conocido para exponentes naturales, y había sido muy usado por Pascal para resolver una gran variedad de problemas.

Newton, en su intento de calcular la cuadratura del círculo, es decir, de calcular la integral $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$, consideró dicha cuadratura como un problema de interpolación, relacionándola con las cuadraturas análogas $\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$ conocidas para exponentes naturales $n \in \mathbb{N}$. Newton tuvo la ocurrencia de sustituir el límite superior de integración por un valor genérico x. De esta forma obtuvo las siguientes cuadraturas (Newton no disponía de símbolo para la integral; usamos, claro está, la notación actual).

$$\begin{aligned}
\int_0^x (1-t^2)\,\mathrm{d}t &= x - \frac{1}{3}x^3\\
\int_0^x (1-t^2)^2\,\mathrm{d}t &= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\\
\int_0^x (1-t^2)^3\,\mathrm{d}t &= x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\\
\int_0^x (1-t^2)^4\,\mathrm{d}t &= x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9
\end{aligned}$$

Newton observó que el primer término de cada expresión es x, que x aumenta en potencias impares, que los signos algebraicos se van alternando, y que los segundos términos $\frac{1}{3}x^3, \frac{2}{3}x^3, \frac{3}{3}x^3, \frac{4}{3}x^3$ estaban en progresión aritmética. Razonando por analogía, supuso que los dos primeros términos de $\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t$ deberían ser

$$x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3$$

De la misma manera, procediendo por analogía, pudo encontrar algunos términos más:

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t = x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{8}}{5}x^5 - \frac{\frac{1}{16}}{7}x^7 - \frac{\frac{1}{128}}{9}x^9 - \cdots$$

Representando para $n = 0, 1, 2, \ldots$ por $Q_n(x)$ el polinomio $\int_0^x (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$, se tiene que

$$Q_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

Donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}, \qquad \binom{n}{0} = 1$$

Haciendo ahora en $Q_n(x)$, $n = 1/2$, se obtiene

$$Q_{1/2}(x) = x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{8}}{5}x^5 - \frac{\frac{1}{16}}{7}x^7 - \frac{\frac{1}{128}}{9}x^9 - \cdots$$

Lo que llevó a Newton a concluir que

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t = Q_{1/2}(x)$$

Donde $Q_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ es una suma con infinitos términos. A partir de aquí, Newton dedujo el desarrollo de $(1-x^2)^{1/2}$ por derivación.

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{128}x^8 - \cdots$$

Newton nunca publicó su teorema binomial, ni dio una demostración general del mismo. La primera vez que apareció en un texto impreso fue en 1685 en un libro de Wallis (que reconoce la autoría de Newton), titulado *Treatise of Algebra*. Newton mismo, en una carta a Henry Oldenburg, el secretario de la Royal Society, conocida como la *Epistola Prior* (junio de 1676), expone el teorema binomial, a requerimiento de Leibniz, con estas oscuras palabras:

> Las extracciones de raíces resultan muy abreviadas por el teorema
>
> $$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc}$$
>
> donde $P+PQ$ representa una cantidad cuya raíz o potencia, o cuya raíz de una potencia se necesita calcular, siendo P el primer término de esa cantidad, Q los términos restantes divididos por el primero, y $\frac{m}{n}$ el índice numérico de las potencias de $P+PQ\ldots$ Por último $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}AQ, C = \frac{m-n}{2n}BQ$ y así sucesivamente.

Newton era consciente de que su forma de razonar por analogía no era rigurosa por lo que comprobó su resultado de varias formas. Aplicó su algoritmo a diversos resultados conocidos, comprobando que las soluciones obtenidas eran siempre correctas, redescubrió la serie de Mercator para el logaritmo y obtuvo las series del arcoseno y del seno. Por cierto, que es en este contexto de la serie binomial cuando Newton usa por primera vez exponentes fraccionarios o negativos para realizar cálculos rutinarios.

Newton encontró que el método de desarrollos en serie proporcionaba un algoritmo casi universal para calcular cuadraturas y resolver multitud de problemas. En su obra *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, escrita en 1669 y publicada en 1711, aunque circulaba en forma manuscrita entre los colegas y conocidos de Newton, propuso un método para cuadrar una curva consistente en tres reglas:

1. El área bajo la curva de ecuación $y = ax^{m/n}$ es $\dfrac{na}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$.
2. Si la ecuación $y = y(x)$ de la curva está dada por un número finito de términos $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$, el área bajo la curva y es igual a la suma de las áreas de todos los términos $y_1, y_2, y_3, \ldots$
3. Si la curva tiene una forma más complicada, entonces debe desarrollarse la ecuación de la curva en una serie del tipo $\sum a_k x^{r_k}$, donde r_k es un número racional, y aplicar las reglas 1 y 2.

Debe notarse que Newton supuso que cualquier cantidad analíticamente expresada podía desarrollarse en una serie de la forma $\sum a_k x^{r_k}$, donde r_k es un número racional, serie que puede ser cuadrada término a término usando la regla 1.

Veamos un ejemplo de esta forma de proceder. Se trata de calcular $\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\,\mathrm{d}x$. Newton procede como sigue

$$(x-x^2)^{1/2} = x^{1/2}(1-x)^{1/2} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} - \frac{1}{128}x^{9/2} - \cdots$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_0^{1/4} (x-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{5}x^{5/2} - \frac{1}{28}x^{7/2} - \frac{1}{72}x^{9/2} - \frac{5}{704}x^{11/2} - \cdots\right]_0^{1/4} \\ &= \frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \frac{5}{704\cdot 2^{11}} - \cdots \qquad (4)\end{aligned}$$

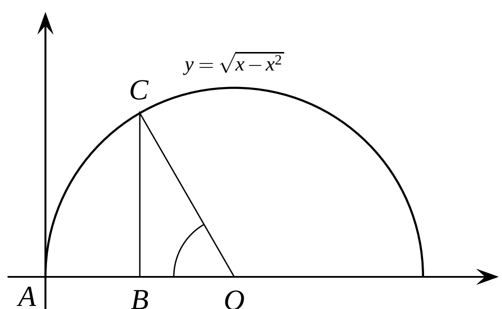


Figura 1. Cuadratura $\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\,\mathrm{d}x$

En la figura 1 se ha representado el semicírculo de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$. El sector circular COA tiene amplitud $\pi/3$ por lo que su área es la tercera parte de la del semicírculo, es decir, $\pi/24$. Como $BC = \sqrt{3}/4$, el área del triángulo BOC es $\sqrt{3}/32$. Por otra parte, la integral calculada en (4) es el área de la región ACB. Por tanto:

$$\int_0^{1/4} (x-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x + \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{\pi}{24}$$

Deducimos que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \frac{5}{704\cdot 2^{11}} - \cdots\right)$$

Y de esta forma, Newton expresa la cuadratura del círculo por medio de una serie infinita que, además, converge rápidamente.

Newton utilizó series para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden [6]; así, para integrar

$$\dot{y} = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2 y$$

Supone que

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

Entonces

$$\dot{y} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \cdots$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación e igualando coeficientes de las mismas potencias de x, obtiene

$$A_1 = 2 - A_0, \quad 2A_2 = 3 - 2A_1, \quad 3A_3 = 1 + A_0 - 2A_2, \ldots$$

Se determinan así los A_n el hecho de que A_0 queda indeterminado y que por lo tanto existen infinitas soluciones fue advertido, pero la importancia de una constante arbitraria no fue plenamente apreciada hasta aproximadamente 1750. Leibniz resolvió algunas ecuaciones diferenciales elementales por medio de series y utilizó también el método anterior de coeficientes indeterminados.

En *De Analysi* Newton aplica su método de *aproximaciones sucesivas* para el calculo de soluciones de una ecuación, el ahora conocido como *método de Newton*, para revertir (invertir) series. Dicho método aplicado a la serie:

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

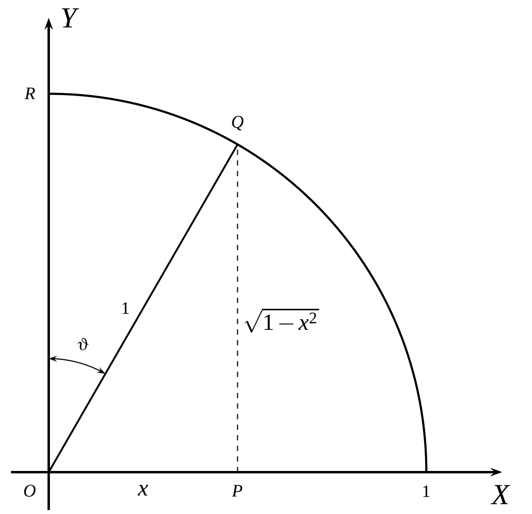
le llevó a:

$$x = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{120}y^5 + \cdots$$

Ya que $y = \log(1+x)$, o sea, $x = e^y - 1$, lo que ha obtenido Newton es el desarrollo por primera vez de la función exponencial:

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{120}y^5 + \cdots$$

También obtuvo por primera vez la serie del seno de la siguiente forma [7]. Consideremos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ como en la figura siguiente.



El número $\vartheta = \operatorname{arcsen} x$ es el doble del área del sector circular *OQR*. Newton, después de haber integrado $\sqrt{1-x^2}$ usando la serie binomial, sabía que el área del segmento *OPQR* era

$$x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \cdots$$

Se deduce que

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsen} x = \vartheta = 2\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 + \cdots\right) - x\sqrt{1-x^2} = \\ = 2\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 + \cdots\right) - x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots\right) = \\ = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots\end{aligned}$$

Invirtiendo esta serie, Newton obtiene la serie para el seno y se da cuenta de la *obvia* sucesión de los coeficientes:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

La confianza de Newton en los procesos infinitos queda reflejada en las siguientes palabras de la citada obra *De analysi*:

> Todo lo que el análisis común [es decir, el álgebra] realiza por medio de ecuaciones con un número finito de términos, este nuevo método puede siempre conseguir lo mismo por medio

> de ecuaciones infinitas, de tal forma que no he tenido ninguna duda en darle asimismo el nombre de análisis. Porque el razonamiento en éste no es menos cierto que en el otro; ni las ecuaciones menos exactas; aunque nosotros los mortales, cuyo poder de razonamiento está confinado dentro de estrechos límites, no podemos expresar ni tampoco concebir todos los términos de esas ecuaciones como para conocer exactamente a partir de ellas las cantidades que deseamos... Para terminar, podemos considerar todo esto como perteneciente al *Arte Analítica*, con cuya ayuda pueden ser determinadas de una manera exacta y geométricamente las áreas, longitudes, etc., de curvas.

Es decir, Newton no sólo descubrió el teorema binomial sino que las series infinitas proporcionaban un método de análisis con la misma consistencia interna que el álgebra de ecuaciones finitas. De manera que, para Newton, las series infinitas no eran más que una parte del álgebra, un álgebra superior que trata de un número infinito de términos en lugar de un número finito.

1.3. Euler y el cálculo con series

Como la mayoría de los matemáticos del siglo XVIII, Euler hizo notables aportaciones al cálculo con series infinitas. Para hacernos una idea de cómo trabajaba Euler vamos a reproducir su desarrollo en serie de la función exponencial tal como aparece en el Volumen I de su famosa obra *Introductio in Analysin Infinitorum* ([2], pg. 531).

Dado $a>1$, Euler escribe $a^{\omega}=1+k\omega$, donde ω debe considerarse un número *infinitamente pequeño* ("tan pequeño que justamente no es igual a cero") y k es una constante que sólo depende de a. Para cualquier número real x pongamos $j=x/\omega$; entonces

$$a^{x}=a^{j\omega}=(1+k\omega)^{j}=(1+kx/j)^{j},$$

y desarrollando por el binomio de Newton

$$a^{x}=1+\frac{j}{1!}\frac{kx}{j}+\frac{j(j-1)}{2!}\left(\frac{kx}{j}\right)^{2}+\frac{j(j-1)(j-2)}{3!}\left(\frac{kx}{j}\right)^{3}+\cdots$$

Como ω es infinitamente pequeño, j es infinitamente grande, lo que permite a Euler suponer que

$$1=\frac{j-1}{j}=\frac{j-2}{j}=\frac{j-3}{j}=\cdots$$

Para concluir que

$$a^{x}=1+\frac{kx}{1!}+\frac{(kx)^{2}}{2!}+\frac{(kx)^{3}}{3!}+\cdots$$

Y haciendo $x=1$

$$a=1+\frac{k}{1!}+\frac{k^{2}}{2!}+\frac{k^{3}}{3!}+\cdots$$

Puesto que para $k=1$ se tiene que $\log a = \dfrac{\log(1+\omega)}{\omega} = 1$ (pues ω es infinitamente pequeño), se sigue que $\log a = 1$. Este número Euler lo representa con el símbolo e. Por tanto

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Usando esta serie, Euler calcula e=2.71828182845904523536028… con 23 cifras decimales. Naturalmente, la hipótesis de que ω es "infinitamente pequeño" puede evitarse sin más que usar límites.

Se debe también a Euler la divulgación a través de sus escritos del símbolo π para representar el cociente entre la longitud de una circunferencia y la de su diámetro; así mismo, en sus últimas obras introdujo el símbolo i para representar a la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$. También le debemos las abreviaturas que seguimos usando para representar las funciones elementales, así como el empleo del símbolo $\sum$ para indicar una suma, y, como indicamos en su momento, la notación $f(x)$ para indicar el valor de una función f en un número x. Ya en 1740, Euler, en una carta a Jean Bernoulli, usa exponentes imaginarios y escribe la igualdad $\mathrm{e}^{x\sqrt{-1}} + \mathrm{e}^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$. Las conocidas identidades de Euler aparecieron en su obra *Introductio*.

Veamos otro ejemplo del proceder de Euler; concretamente su cálculo de la suma de la serie de los inversos de los cuadrados de los números naturales. Oldenburg, en una carta a Leibniz en 1673, preguntaba por la suma de esta serie, pero Leibniz no respondió. Tampoco pudo calcularla Jacques Bernoulli. Euler parte de la serie conocida

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

o bien, para $x \neq 0$:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Interpretando la expresión de la derecha como un polinomio en x, sus raíces son los números $n\pi$ para n entero, poniendo $x^2 = y$, Euler considera la siguiente "ecuación":

$$0 = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \cdots$$

Cuyas soluciones son $n^2\pi^2$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$. Era sabido que la suma de los inversos de las raíces de una ecuación algebraica cuyo término independiente vale 1 es igual al opuesto del coeficiente del término de grado uno. Euler, tratando una serie como si fuera un polinomio, concluye que

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi 2} + \frac{1}{4^2\pi^2} + \cdots = \frac{1}{6} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

De hecho, Euler fue un poco más allá y "factorizó" $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$ como si fuera un polinomio por medio de un producto infinito:

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=\\
&\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdots=\\
&\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots
\end{aligned}
$$

Igualando coeficientes en x^2 vuelve a obtener que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Euler era consciente de que sus razonamientos no estaban bien justificados, y en su obra ([5],§158) da una nueva demostración, ahora rigurosa, de este resultado.

Por otra parte, puesto que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

Haciendo en esta igualdad $x=\pi/2$ se obtiene

$$\frac{2}{\pi}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\cdots=\frac{3}{4}\frac{15}{16}\frac{35}{36}\cdots=\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots}$$

que es la conocida fórmula de Wallis.

Euler estableció una conexión entre la serie armónica y los números primos que puede ser considerada el inicio de la teoría analítica de números. Probó la sorprendente “igualdad”

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdots}{1\cdot2\cdot4\cdot6\cdot10\cdot12\cdots} \tag{5}$$

donde, explica Euler, “el numerador en la derecha es el producto de todos los números primos y el denominador el producto de todos los números una unidad menores que los primos”.

Euler empieza su “prueba” escribiendo $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$, él sabe que S es una cantidad infinita, no es en absoluto un número, pero eso no va a detenerle y en sus cálculos trata S como si fuera un número con las reglas usuales. Así, escribe:

$$\frac{1}{2}S=S-\frac{1}{2}S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots\right)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots \tag{6}$$

Y observa que en la serie obtenida no hay denominadores pares. Multiplicando esta serie por $\frac{1}{3}$ obtiene:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\cdots$$

Y sustrayendo esta serie de la anterior (6):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}S-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S\right)=\frac{1\cdot2}{2\cdot3}S&=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\cdots\right)=\\
&=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots
\end{aligned}
$$

Y en esta última serie los denominadores no contienen a 2 ni a 3 como factores. La siguiente etapa de este proceso sería

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}S-\frac{1}{5}\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}S=\frac{1\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 5}S=&\\ &=\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{35}+\frac{1}{55}+\frac{1}{65}+\cdots\right)=\\ &=1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots\end{aligned}$$

Y en la serie obtenida los denominadores no contienen a 2, ni a 3, ni a 5 como factores. Para Euler el proceso ya está claro: en cada etapa removemos todos los denominadores que son divisibles por un primo y generamos una serie reducida que empieza en $1+\frac{1}{p}$ en la que en el siguiente paso eliminaremos los denominadores divisibles por el primo p. Alguien como Euler, que no se asusta con los procesos infinitos, concluye que después de una infinitud de divisiones y sustracciones obtendríamos:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdots}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdots}S=1$$

Y multiplicando en cruz resulta finalmente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=S=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdots}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdots}$$

¿No es asombroso?

Para sacar algo de provecho a este ingenioso razonamiento de Euler, observemos que para todo natural $p\geqslant 2$:

$$\frac{p}{p-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^n}$$

Por lo que, si representamos por $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los primos, podemos escribir la igualdad (5) en la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} \tag{7}$$

Si p,q,r son números primos, los inversos de los números de la forma $p^n q^m r^l$ donde $n,m,l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, tienen una suma finita pues dicha suma es:

$$\sum_{n,m,r=0}^{\infty}\frac{1}{p^n q^m r^l}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^n}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{q^m}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^l}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\frac{1}{1-\frac{1}{q}}\frac{1}{1-\frac{1}{r}}$$

Deducimos de la igualdad 7 que hay infinitos números primos. Aunque los razonamientos de Euler pueden calificarse de *matemágicas*, esta última afirmación puede probarse de manera impecable a partir de las ideas desarrolladas usando la divergencia de la serie armónica. Es una manera bastante llamativa de probar un resultado conocido desde la antigüedad. Te lo dejo para que lo hagas tú.

Aunque la igualdad 7 carece de sentido, Euler, después de probarla, afirma ([5],§274) que también se cumple para potencias cualesquiera, aunque él está pensando en potencias enteras, es decir que para $s \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

De hecho, esta igualdad es válida y hay convergencia para todo número complejo $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(s) > 1$. Dicha igualdad es conocida como *producto de Euler*. La serie de la izquierda permite definir, por extensión analítica a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, la famosa *función zeta* de Riemann.

1.4. El problema de la convergencia y la divergencia

En esta sección sigo muy de cerca el libro [6]. En los trabajos sobre series del siglo XVIII dominó el punto de vista formal, su justificación estaba en la utilidad de los resultados obtenidos sin que preocuparan mucho las cuestiones de convergencia o divergencia. Newton, Leibniz, Euler e incluso Lagrange consideraban las series de potencias como una extensión del álgebra de polinomios y no advertían que al extender las sumas a un número infinito de términos estaban dando lugar a nuevos problemas. Era justamente la carencia de un concepto preciso de límite lo que llevaba a los matemáticos de la época a contemplar el cálculo infinitesimal de un modo ingenuo, como una extensión del álgebra. Acabamos de ver algunos ejemplos de cómo trabajaba Euler con series sin preocuparse de su posible convergencia, no obstante obtenía resultados que posteriormente o bien han podido probarse de manera rigurosa o, cuando ello no era posible, han proporcionado las ideas clave para probar resultados de gran utilidad, especialmente en teoría analítica de números. Pero a veces se obtenían resultados muy sorprendentes, sobre todo cuando trabajaban con series divergentes. Veamos algunos ejemplos.

Sea $S = 1-1+1-1+1-1+\cdots$. Entonces $S-1 = -(1-1+1-1+\cdots) = -S$. Luego $S = 1/2$.

A este resultado también se llega haciendo $t = 1$ en la igualdad $\dfrac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+t^4-t^6+\cdots$.

¿Te parece un disparate? Veamos. Si $\sum c_n$ es una serie numérica convergente, entonces la serie $\sum c_n t^n$ converge uniformemente en $[0,1]$ y $\lim\limits_{t\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n t^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. Este resultado se conoce como *teorema límite de Abel*. Se dice que una serie $\sum a_n$ es sumable en el sentido de Abel, o A-sumable, si existe el límite $\lim\limits_{t\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, cuyo valor se llama la A-suma o suma de Abel de la serie. Acabamos de ver que la serie $1-1+1-1+1-1+\cdots$ es A-sumable y su A-suma es $1/2$. Es decir, el teorema límite de Abel permite asignar un valor numérico a algunas series que no son convergentes en sentido usual. Nada se pierde con ello porque dicho teorema nos dice que toda serie convergente en el sentido usual es Abel sumable y su A-suma coincide con su suma.

Sea $B = 1-2+3-4+5-6+\cdots$. Entonces

$$\begin{aligned} B &= 1+(-2+3-4+5-6+\cdots) \\ &= 1-(1-1+1-1+1-1+\cdots)-(1-2+3-4+5-6+\cdots) \\ &= 1-A-B \end{aligned}$$

Luego $B = 1/4$. Esto es correcto si interpretamos la suma en el sentido de Abel pues se tiene que:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nt^n = t\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nt^{n-1} = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n \\ &= t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{n-1} = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t\sum_{n=1}^{\infty}(-t)^{n-1} = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{1+t}\right) = \frac{t}{(1+t)^2} \end{aligned}$$

Claramente $\lim\limits_{t\to 1} f(t) = 1/4$. Es decir, la serie $\sum(-1)^{n-1}n = 1-2+3-4+5-6+\cdots$ es A-sumable y su A-suma es $1/4$.

Hay otras formas de asociar un significado a ciertas series que no son convergentes en el sentido usual. Pero antes que nada era necesario precisar el concepto de convergencia para series.

La distinción entre convergencia y divergencia había sido ya tenida en cuenta por algunos matemáticos del siglo XVII. De hecho, los términos “convergente” y “divergente” fueron empleados en 1668 por James Gregory, pero no desarrolló sus ideas. Newton reconoció la necesidad de examinar la convergencia, pero no pasó de afirmar que, para valores pequeños de la variable, las series de potencias convergen al menos tan bien como la serie geométrica.

También Leibniz mostró cierto interés acerca de la convergencia y en una carta del 25 de octubre de 1713 indicó a Jean Bernoulli lo que hoy es un teorema, a saber, que una serie cuyos términos alternan de signo y decrecen en valor absoluto monótonamente hacia cero, es convergente.

Edward Waring (1734-98), Lucasian Professor de matemáticas en la universidad de Cambridge, probó que las series (que ahora llamamos “de Riemann”) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ convergen para $\alpha > 1$ y divergen para $\alpha \leqslant 1$.

En 1768 D’Alembert dio un criterio para la convergencia absoluta de una serie $\sum a_n$, a saber: que exista un número $0 < \rho < 1$ tal que para todo n mayor o igual que un cierto n_0 se verifique que $|a_{n+1}|/|a_n| < \rho$.

Cauchy en su *Course d’analyse* (1821) al principio del Capítulo VI da las siguientes definiciones:

> Se llama *serie* a una sucesión indefinida de cantidades $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ que derivan unas de otras según una ley determinada. Estas cantidades son ellas mismas los diferentes *términos* de la serie considerada. Sea $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ la suma de los primeros n términos, n designando un número entero cualquiera. Si, para valores de n siempre crecientes, la suma S_n se aproxima indefinidamente a un cierto límite S, se dirá que la serie es *convergente* y el límite en cuestión se llamará *suma* de la serie. Al contrario, si mientras que n

crece indefinidamente, la suma S_n no se aproxima a ningún límite fijo, se dirá que la serie es *divergente* y no tendrá suma.

Un poco más adelante, después de estudiar la serie geométrica dice:

> Para que la serie $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ sea convergente es necesario y suficiente que para valores infinitamente grandes del número n las sumas $S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$ difieran del límite S, y en consecuencia entre ellas, por cantidades infinitamente pequeñas.

La necesidad de esta condición es clara pero Cauchy no podía probar su suficiencia porque todavía no se había establecido la propiedad de complitud de los números reales. Una demostración rigurosa de lo que ahora conocemos como “condición de Cauchy” requiere la construcción previa del cuerpo de los números reales.

Cauchy establece en este libro una serie de criterios de convergencia para series de términos positivos, entre ellos, el que ahora se conoce como “criterio de Cauchy” el cual pasó inadvertido y fue redescubierto por Hadamard en 1892 y es un resultado fundamental para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias compleja. El estudio de los criterios de convergencia para series refleja el cambio radical en la forma de entender el Análisis con respecto a la tradición del siglo XVIII. Cauchy establece la convergencia de una serie bajo convenientes hipótesis sobre su término general sin necesidad de conocer el valor de la suma de la serie.

También “demuestra” Cauchy un teorema que afirma que *la suma de una serie de funciones continuas es una función continua*. Un sencillo ejemplo prueba que Cauchy se equivoca. La serie $\sum u_n(x)$ donde

$$u_n(x) = \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1} \quad (x > -1)$$

cuyas sumas parciales son $S_n(x) = 1 - \dfrac{1}{nx+1}$ tiene como suma la función $S(x) = 1$ para $x > -1$, $x \neq 0$, y $S(0) = 0$, que es discontinua en 0.

Poco tiempo después, en 1826, Abel, en un artículo sobre la convergencia de la serie binomial, observó que este resultado de Cauchy “debía tener excepciones”, que era una forma educada de decir que el teorema era falso y necesitaba hipótesis adicionales. No obstante, Abel también cometió errores parecidos en sus demostraciones. La razón de esto es el uso de los infinitesimales en las demostraciones que impedía ver las relaciones de dependencia entre las distintas variables. Naturalmente, es el concepto de *convergencia uniforme* el que se necesita para que el teorema de Cauchy sea correcto. Dicho concepto fue introducido por Weierstrass en sus clases de la Universidad de Berlin a principio de los años 1860.

1.5. El problema de la cuerda vibrante y las series trigonométricas

[1]Las series trigonométricas surgieron en la Matemática en el siglo XVIII, en relación con el estudio de las pequeñas oscilaciones de medios elásticos, pero como veremos, su influencia fue decisiva en el desarrollo del Análisis a lo largo del siglo XIX. Es realmente sorprendente la omnipresencia del tema en multitud de situaciones, de tal modo que puede rastrearse su presencia como motivador de gran parte de los desarrollos más importantes acaecidos en este siglo, desde la evolución de la noción misma de función hasta el comienzo de la topología o los números transfinitos, pasando por el desarrollo de las distintas nociones de integración.

Una *serie trigonométrica* es cualquier serie de la forma

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geqslant 1}(a_n\cos(n\pi x/\ell)+b_n\operatorname{sen}(n\pi x/\ell)) \tag{8}$$

donde a_n, b_n son constantes llamadas coeficientes de la serie. Observa que se trata de una serie de funciones periódicas con período 2ℓ.

La posibilidad de representar una función dada por medio de una serie trigonométrica aparece por primera vez a mediados del siglo XVIII en los trabajos de Leonhard Euler (1701-1783) y de Daniel Bernoulli (1700-1782) sobre el problema de la cuerda vibrante.

Es sabido que un punto material de masa m que se mueve sin rozamiento a lo largo de una recta, que suponemos es el eje de ordenadas, sometido a la atracción de una fuerza central, que suponemos situada en el origen, proporcional al desplazamiento y que se opone al mismo, viene dado por la ED

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)=-\frac{k}{m}y(t) \qquad (k>0) \tag{9}$$

Cuya solución general es

$$y(t)=C_1\operatorname{sen}(\omega t)+C_2\cos(\omega t) \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10}$$

En 1727, Johann Bernoulli consideró el caso de n puntos materiales con igual masa, dispuestos a igual distancia, ℓ/n, a lo largo de una cuerda o varilla elástica ideal, sin peso, de longitud ℓ, situada sobre el eje de abscisas y asimilada al intervalo $[0,\ell]$, cuyos extremos se mantienen tensos y fijados. La varilla, que inicialmente está en reposo, se desplaza de su posición inicial y se suelta con lo que empieza a oscilar. Se supone que las oscilaciones son de amplitud pequeña y que la tensión T en la varilla (que podemos imaginar como una cuerda ideal de violín) es constante a lo largo de la misma.

Analizando el movimiento de la masa k-ésima, J. Bernoulli probó que su desplazamiento vertical venía dado por

$$\frac{\mathrm{d}^2y_k}{\mathrm{d}t^2}(t)=\left(\frac{na}{\ell}\right)^2\big(y_{k+1}(t)-2y_k(t)+y_{k-1}(t)\big) \quad k=1,2,\dots,n-1$$

[1]En el resto de esta sección he seguido muy de cerca los trabajos [3], [4], [1] y [9] copiando y pegando diversos pasajes de los mismos.

Donde $a^2 = \ell T/M$ siendo M la masa total. En 1747, Jean Le Rond dÁlembert (1717 - 1783), estudió este mismo problema pero considerando la varilla como un medio continuo. Lo que hizo fue reemplazar en las ecuaciones anteriores y_k por $y(t,k)$ y ℓ/n por $\triangle x$. Con ello

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x) = a^2 \frac{y(t,x+\triangle x) - 2y(t,x) + y(t,x-\triangle x)}{(\triangle x)^2}$$

dÁlembert consideró que cuando n se hace infinito, $\triangle x$ tiende a cero, por lo que la igualdad anterior se convierte en:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x) = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t,x) \tag{11}$$

donde ahora $a^2 = T/\sigma$, siendo σ la densidad lineal de masa (masa por unidad de longitud). Apareció así, por primera vez, la que ahora se llama ecuación de ondas en una dimensión. Ya que la varilla está fijada por sus extremos $x = 0$ y $x = \ell$, la solución debe satisfacer las *condiciones de contorno*:

$$y(t,0) = 0, \quad y(t,\ell) = 0 \qquad (t \geqslant 0). \tag{12}$$

En el momento inicial $t = 0$, la varilla se desplaza hasta adoptar la forma de una curva dada por $y = f(x)$ y después se suelta, lo que significa que la velocidad inial es cero. Estas *condiciones iniciales*, se traducen por:

$$y(0,x) = f(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0 \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{13}$$

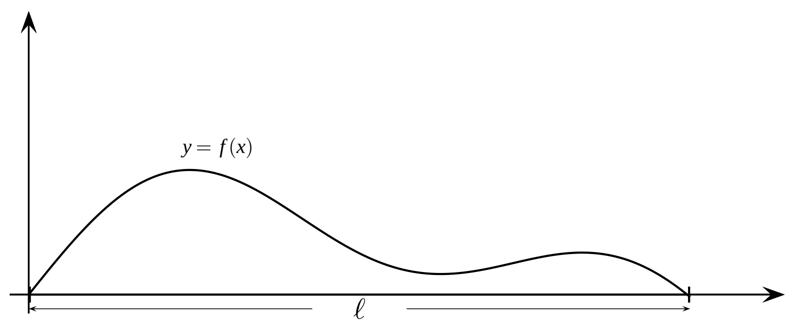


Figura 2. Varilla

Haciendo en la ecuación (11) el cambio de variables dado por $\left\{ \begin{array}{ccc} \xi & = & at+x \\ \eta & = & at-x \end{array} \right\}$ poniendo $y(t,x) = y^*(\xi,\eta)$, e indicando con subíndices las derivadas parciales respecto a las correspondientes variables, se tiene que

$$\begin{aligned} y_{xx} &= y^*_{\xi\xi} - 2y^*_{\xi\eta} + y^*_{\eta\eta} \\ y_{tt} &= a^2(y^*_{\xi\xi} + 2y^*_{\xi\eta} + y^*_{\eta\eta}) \end{aligned}$$

Por lo que, en las nuevas variables es $y_{tt} - a^2 y_{xx} = 4a^2 y^*_{\xi\eta}$. Es inmediato que $y^*_{\xi\eta} = 0$ tiene como solución general $y^*(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\phi(\xi) + \frac{1}{2}\psi(\eta)$, donde hemos puesto el factor $\frac{1}{2}$ para ajustar los cálculos que siguen. Deducimos que

$$y(t,x)=\frac{1}{2}\phi(at+x)+\frac{1}{2}\psi(at-x) \tag{14}$$

Hasta ahora, lo que dÁlembert ha probado es que toda solución de la EDP (11) es de la forma (14) donde ϕ y ψ son funciones cualesquiera de clase C^2. Es fácil probar también la afirmación recíproca por sustitución directa de (14) en (11).

Queda imponer que (14) verifique las condiciones (12) y (13).

$$\left.\begin{array}{r} y(t,0)=0 \\ y(t,\ell)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \phi(at)+\psi(at)=0 \Longrightarrow \phi=-\psi \\ \phi(at+\ell)+\psi(at-\ell)=0 \Longrightarrow \phi(at+\ell)=\phi(at-\ell) \end{array}\right.$$

Deducimos que ϕ es periódica con periodo 2ℓ. La condición $\dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x)=0$ implica, teniendo en cuenta (14) y que $\phi=-\psi$, que

$$\phi'(x)=\phi'(-x) \implies \phi(x)=-\phi(-x) \tag{15}$$

y obtenemos que ϕ es una función impar. Finalmente, la condición $y(0,x)=f(x)$ implica por (14) y por ser $\psi(-x)=-\phi(-x)=\phi(x)$, que $\phi(x)=f(x)$ para $0\leqslant x\leqslant \ell$. En resumen:

$$y(t,x)=\frac{1}{2}\phi(at+x)-\frac{1}{2}\phi(at-x) \tag{16}$$

Donde ϕ es una función impar, periódica con periodo 2ℓ que coincide con f en $[0,\ell]$. Claramente, en las condiciones dadas, hay una única solución ϕ para cada posición inicial $y=f(x)$. DÁlembert consideraba las funciones como expresiones analíticas y, por tanto, si dos funciones coinciden en un intervalo deben ser idénticas. Por tanto, la función f debe ser la misma ϕ y, en particular, f debe ser de clase C^2.

En 1749, Euler presenta el primero de los 15 trabajos que dedicó a este problema, iniciando así un debate que duró cerca de 50 años y en el que intervinieron la mayoría de los grandes matemáticos de la época. La solución de Euler no difiere técnicamente de la de dÁlembert, aunque sí el método de deducción. Partiendo de la posición inicial $u(0,x)=f(x)$ de la cuerda, obtiene geométricamente la solución en la forma

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\widetilde{f}(at+x)+\frac{1}{2}\widetilde{f}(x-at)$$

Donde $\widetilde{f}$ es la extensión impar, periódica con periodo 2ℓ de f. Para Euler, esta ecuación funcional describe totalmente el fenómeno físico y, puesto que podemos elegir arbitrariamente la forma inicial de la cuerda (y Euler pone concretamente el ejemplo de una poligonal), f puede ser totalmente arbitraria, es decir, “regular y contenida en una cierta ecuación, o irregular y mecánica”.

El problema subyacente en esta polémica estriba, en primer lugar, en la noción misma de función, que Euler y DÁlembert utilizaban con el mismo nombre, pero con significados distintos. En general, la idea de función no había sido definida con claridad. Para los matemáticos del XVIII la noción más aceptada es la adoptada por el propio Euler en el Capítulo I de su famoso *Introductio in Analysin Infinitorum*, publicado en 1748:

> Una función de una cantidad variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes.

Parece ser que el problema de la cuerda vibrante le llevó a ampliar este concepto de función. Euler distinguía dos tipos de funciones: aquellas que pueden expresarse mediante una sola fórmula analítica del tipo $y = f(x)$, a las que llamaba continuas (esta idea de continuidad no tiene nada que ver con la actual), y aquellas que se obtienen enganchando trozos de estas funciones; por ejemplo, un semicírculo seguido por un trozo de una parábola. Este tipo de funciones, a las que llamaban discontinuas o geométricas o mecánicas, no eran admitidas por DÁlembert.

Realmente, las funciones admitidas por Euler como posición inicial de la cuerda serían lo que en lenguaje moderno llamaríamos "funciones continuas, de clase C^1 a trozos". De hecho, las confrontaciones más intensas entre Euler y DÁlembert se referían a la posibilidad de considerar como funciones válidas a las que tuvieran "picos" (como las poligonales), es decir, con derivada discontinua en algunos puntos. Euler admitía las objeciones de DÁlembert desde el punto de vista del rigor, pero defendía la necesidad de encontrar nuevos instrumentos matemáticos para extender las leyes del cálculo conocido a situaciones más generales, justificada en todo caso por la evidencia física del problema.

Un nuevo episodio en este debate lo protagonizó el amigo de Euler Daniel Bernoulli. Éste era esencialmente lo que hoy llamaríamos un físico matemático. Por ello, los argumentos físicos prevalecían para él sobre los razonamientos matemáticos. En consecuencia, retomando los argumentos de su padre Johann, propuso en 1753 que la posición general de la cuerda debiera obtenerse por superposición (o sea,combinación lineal, eventualmente infinita) de vibraciones elementales sinusoidales. Más precisamente, hizo el siguiente análisis.

Supondremos, por comodidad, que $\ell = \pi$ y $a = 1$. Si se toma como posición inicial la función $u_n(0,x) = \operatorname{sen}(nx)$, la solución correspondiente será:

$$\frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(n(x+t)) + \operatorname{sen}(n(x-t))\big) = \cos(nt)\operatorname{sen}(nx)$$

Ahora viene la afirmación atrevida de Bernoulli: cualquier función $f(x)$ puede expresarse en la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \tag{17}$$

En cuyo caso, como la ecuación de ondas es lineal, la solución general debe ser de la forma:

$$y(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nt)\operatorname{sen}(nx) \tag{18}$$

En el caso general de que la longitud de la varilla es ℓ y el valor del parámetro es a sería:

$$y(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{na\pi}{\ell}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{19}$$

Obviamente, en la época de D. Bernoulli el concepto de serie de funciones, no estaba aun bien definido, por lo que en este punto la serie (19) ha de ser interpretada de manera formal. Sin embargo, lo que interesa es que D. Bernoulli entendió que la superposición de las soluciones correspondientes a los armónicos $u_n(0,x) = \text{sen}(nx)$ permite construir clases más generales de soluciones de (11).

La razón que daba Bernoulli para afirmar la posibilidad del desarrollo (17) es que *había suficientes coeficientes b_n* para conseguirlo, pero no decía nada de cómo podían calcularse dichos coeficientes.

La solución de Bernoulli fue rechazada por Euler por no ser lo suficientemente general. Euler afirmaba que una función que se obtuviera por composición de sinusoides como en (17), debía ser impar y periódica y tener otras regularidades. En particular, debía ser representable por una sola fórmula analítica, es decir, que en su terminología, sería una función "continua" lo que excluía, por ejemplo, a una línea poligonal. Dicho de otra forma, para Euler la parte de la derecha de la igualdad (17) es lo que él llama una función sometida a ley de continuidad, es decir, representada por una sola expresión analítica; mientras que la parte de la izquierda puede ser una función geométrica obtenida pegando trozos de varias funciones o, simplemente, "trazada al azar" con la mano.

Las discusiones entre dÁlembert, Euler y D. Bernoulli, en las que a partir de 1759 también intervino de forma importante Lagrange, se prolongaron por una década sin llegar a ningún acuerdo. Lo que estaba en cuestión era el propio concepto de función, y la clase de funciones que se podían representar como superposición de funciones sinusoidales y la idea de prolongación analítica, según la cual se admitía que dos funciones definidas por "expresiones analíticas" que coinciden en un intervalo debían ser idénticas.

1.6. La ecuación del calor y las series de Fourier

La máquina de vapor (James Watt, 1769), protagonista indiscutible de la Primera Revolución Industrial, así como otros problemas de interés científico o técnico, motivaron el interés por desarrollar una teoría matemática de la difusión del calor, dando así lugar a los inicios de la termodinámica. En el año 1811 la Academia de Ciencias de París propuso el problema de la propagación del calor como materia del gran premio que sería asignado en 1812. Este premio fue ganado por el matemático y físico francés Jean Baptiste-Joseph Fourier. El trabajo que presentó Fourier se titulaba *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides* (1811), y era una revisión de otro trabajo inicial, *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* (1807), el cual también había sido presentado a la Academia en 1807 pero había sido rechazado. El trabajo de 1811, aunque ganador del premio, no fue publicado por la Academia porque, según el jurado formado por Lagrange, Laplace, Lacroix y Monge "la manera en la que el autor llega a sus ecuaciones no está exenta de dificultades y su análisis para integrarlas deja aún algo que desear, sea respecto a la generalidad, sea incluso del lado del rigor". En 1822 Fourier publico por su cuenta su libro *Théorie analytique de la chaleur* que muy pronto fue considerado como una de las grandes obras de la Física Matemática y donde incluyó parte de su trabajo de 1812. Finalmente, Fourier, siendo ya Secretario Perpetuo de la Academia, logró publicar su trabajo ganador de 1812 en dos partes aparecidas en 1824 y 1826. Fourier fue un hombre comprometido con su tiempo, consideraba el análisis infinitesimal como la principal herramienta para comprender los fenómenos naturales, firmemente convencido de que las ecuaciones diferenciales apoyadas en datos experimentales previos eran el modelo adecuado para ello, fue el prototipo de lo que hoy consideramos un “matemático aplicado”.

De los diversos problemas de conducción del calor estudiados por Fourier, vamos a considerar el caso más sencillo de una barra cilíndrica alargada de longitud ℓ, homogénea y delgada, cuyos extremos se mantienen a $0°C$ y cuya superficie lateral está aislada. Se supone que la temperatura en cada sección vertical de la barra es constante, y que la distribución de la temperatura inicial está dada por una función conocida $f(x)$ que nos da la temperatura en el momento $t=0$ de la sección de la barra de abscisa x. Fourier demostró, sobre la base de principios físicos, que la función $u(t,x)$ que da el valor de la temperatura en la sección de abscisa x en el tiempo t debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial, llamada ecuación del calor en una dimensión:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & 0<t,\ 0<x<\ell \\ u(t,0)=u(t,\ell)=0 & 0\leqslant t \\ u(0,x)=f(x) & 0\leqslant x\leqslant \ell \end{cases} \tag{20}$$

Donde c es la difusibidad térmica de la barra.

Para resolver este problema, Fourier utiliza su método favorito de *separación de variables*. En primer lugar, se buscan soluciones que sean funciones con las variables separadas:

$$u(t,x)=T(t)X(x) \tag{21}$$

Supondremos en lo que sigue que $\ell=\pi$ y $c=1$. Sustituyendo en la ecuación (20) resulta:

$$T'(t)X(x)=T(t)X''(x) \iff \frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

Puesto que cada lado de esta última igualdad depende solamente de una variable, deben ser ambos constantes, esto es:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

que da lugar a las dos ED ordinarias

$$\begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x) &= 0 \\ T'(t)+\lambda T(t) &= 0 \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno implican $u(t,0)=T(t)X(0)=0$ y $u(t,\pi)=T(t)X(\pi)=0$. Deducimos que, salvo trivialidad, debe ser $X(0)=X(\pi)=0$. Llegamos así al problema de valores propios:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \qquad X(0)=X(\pi)=0 \tag{22}$$

La ecuación $X''(x)+\lambda X(x)=0$ es una ED ordinaria cuyas soluciones dependen de las raíces del polinomio característico $z^2+\lambda=0$ y vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\lambda>0 &\implies X(x)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+c_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)\\
\lambda=0 &\implies X(x)=c_1x+c_2\\
\lambda<0 &\implies X(x)=c_1\cosh(x)+c_2\,\mathrm{senh}(x)
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que en los casos $\lambda=0$ y $\lambda<0$ las condiciones $X(0)=X(\pi)=0$ implican que $c_1=c_2=0$. En el caso $\lambda>0$, la condición $X(0)=0$ implica que $c_1=0$, y $X(\pi)=0$ implica que $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)=0$ lo que, como buscamos soluciones no triviales, exige que $\lambda=n^2$ para $n\in\mathbb{N}$.

Obtenidos los posibles valores de λ, deducimos fácilmente las soluciones elementales de (20):

$$u_n(t,x)=\mathrm{e}^{-n^2t}\,\mathrm{sen}(nx)\qquad n=1,2,3,\dots \tag{23}$$

Aplicando el principio de superposición también será solución cualquier combinación lineal finita de las funciones anteriores, es decir:

$$b_1u_1(t,x)+b_2u_2(t,x)+\cdots+b_nu_n(t,x)$$

Sin embargo, Fourier va más allá y afirma, sin preocuparse demasiado sobre los problemas de convergencia, que también la siguiente función es solución de la ecuación del calor:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\mathrm{e}^{-n^2t}\,\mathrm{sen}(nx) \tag{24}$$

Y para que esto sea así, necesita que se satisfaga la condición inicial $u(0,x)=f(x)$. Por lo tanto, necesita poder desarrollar la función $f(x)$ en la forma:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\mathrm{sen}(nx) \tag{25}$$

Parece que la historia se repite, pues Fourier se encuentra ahora con el problema de la determinación de los coeficientes b_n, algo que no habían sabido resolver Euler, dÁlembert, D. Bernoulli y Lagrange. Pues Fourier logró calcularlos por un camino muy indirecto y con razonamientos que fueron muy criticados en su momento. Para ello desarrollaba la función $f(x)$ en serie de Taylor y lo mismo hacía con las funciones $\mathrm{sen}(nx)$ y, después de bastantes cálculos obtuvo como solución:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x \tag{26}$$

En aquél tiempo, la integral se usaba principalmente como antiderivada, al estilo de Newton. Esta interpretación suponía implícitamente que una función no podía integrarse si no tenía una primitiva, cosa que en general no es cierta. Llegado aquí, Fourier hace una observación muy importante y es que las integrales representan áreas. Esta interpretación de las integrales en (26), hace que Fourier afirme que la función f puede ser completamente arbitraria pues, siendo el área algo intuitivo para cualquier función, las fórmulas (26) que dan los coeficientes tiene sentido cualquiera sea f. De hecho, Fourier afirmó más, pues dijo que la serie (25) era convergente en todo punto x al valor $f(x)$.

Por cierto, a Fourier le debemos la notación $\int_a^b$ para la integral definida.

Acabamos de asistir al nacimiento de las series de Fourier. Es conveniente dar una definición general.

La serie de Fourier de una función f (a la que suponemos definida en $[-\pi,\pi]$) es

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geqslant 1}\big(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\big) \tag{27}$$

donde

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\,,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x \tag{28}$$

Los números a_n y b_n así definidos, se llaman *coeficientes de Fourier* de f.

Las series de Fourier son un tipo particular de series trigonométricas. Resulta llamativo que las fórmulas que dan los coeficientes de Fourier pueden obtenerse partiendo de la igualdad

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx)+b_k\operatorname{sen}(kx)\big) \tag{29}$$

multiplicándola por $\operatorname{sen}(nx)$ y $\cos(nx)$ e integrando término a término (lo que no era problema en la época que consideramos), teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x=0\quad(n,m=0,1,2,\dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x=0\quad(n\neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(nx)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,\mathrm{d}x=\pi\quad(n=1,2,\dots)$$

Lo que no es nada claro es que la igualdad (29) sea cierta. Éste es uno de los muchos problemas que plantean las series de Fourier.

Referencias

[1] F. Bombal. Las series de Fourier y el desarrollo del Análisis en el siglo XIX. https://pdfcoffee.com/qdownload/historia-series-de-fourier-4-pdf-free.html 18

[2] David M. Burton. The History of Mathematics: An Introduction, Sixth Edition. The McGraw-Hill Companies, 2007. 11

[3] Antonio Cañada. Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* Vol.3.3 (2000), 293-320. 18

[4] Antonio Cañada. Fourier y sus coeficientes. *Boletín de la SEMA* **36** (2006), 125-148. 18

[5] Leonhard Euler Introduction to Analysis of the Infinite. Book I Springer-Verlag, New York, 1988 13, 15

[6] M. Kline. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Vols. 1, 2 y 3. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1992. 9, 15

[7] C.H. Edwards The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag New York, Inc., 1976. 3, 9

[8] J.Fourier Théorie analytique de la chaleur, edición facsímil. Cambridge University Press, 2009.

[9] N.N. Luzin. Función. *La Gaceta de la RSME*, Vol.6.2 (2003), 201-225. 18

[10] A. Zygmund. Trigonometric Series. Third Edition. Volumes I & II combined. Cambridge University Press, 2002.